

06/08 Мат. модель распространения эпидемии

Населения, взаимодействия с болезнетворными бактериями или вирусами, делится на 3 части:

1) Число здоровых особей без иммунитета, a , $\Rightarrow$, восприимчивых к болезни — $S(t)$;

2) Число здоровых особей, имеющих иммунитет, либо вакцинированных, либо

переведших данной болезнью, а, $\Rightarrow$, не восприимчивых к данной болезни — $Z(t)$;
3) Число больных особей, являющихся источником распространения болезни — $I(t)$.

Согласно принципу консервативности при отсутствии умерших от данной болезни должно вы-ся тождество: $[S(t) + Z(t) + I(t) = N]$, ⁽¹⁾ где N — общая численность популяции. Времени развития эпидемии сл-ся дост. малым, что можно считать $N = \text{const}$. Можно считать, что изменение числа особей без иммунитета пропорционально их числу:

$\frac{dS}{dt} = -\alpha(I)S(t)$, ⁽²⁾ где $\alpha(I)$ — коэфф-т заболеваемости — зависит от числа больных особей, контакт с I приводит к заболеванию. При этом α — мало при малом числе больных I (мала вер-ть контакта), и увелич-ся при росте I , т.к.

число контактов возрастает. Обычно q/I $\alpha(I)$ выбирают пороговую модель, когда $\alpha(I) = \alpha H(I - I^*)$, где $H(I - I^*) = \begin{cases} 1, & I^* \leq I, \\ 0, & I < I^*, \end{cases} \quad (3)$ а I^* - порог значе-
больных особей.

Изменение числа здоровых особей с иммунитетом $Z(t)$ за счет переболевших данной болезнью пропорционально числу больных $I(t)$. $\frac{dZ}{dt} = \beta I(t)$, (4) где β - коэф-т выздоровления.

Учитывая закон сохранения числа особей популяции (1), получим ур-ние $q/I(t)$: $\frac{dI}{dt} = -\frac{dS}{dt} - \frac{dZ}{dt} = \alpha H(I - I^*) S(t) - \beta I(t) \quad (5)$

И.о., получили мат. модель распростра-
-ния болезни в виде с-мы 3х дифф. ур-
-ний:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\alpha H(I - I^*) S(t), & t \geq 0, \\ \frac{dZ}{dt} = \beta I(t), \\ \frac{dI}{dt} = \alpha H(I - I^*) S(t) - \beta I(t) \end{cases} \quad (6)$$

с начал.

усл-ями: $S(t=0) = S_0$; $Z(t=0) = Z_0$; $I(t=0) = I_0$,
 причем $S_0 + Z_0 + I_0 = N$ (7)

Порог знач-е числа больных I^* фрак-
 тически разбивают зад. (6)-(7) на 2 зада-
 чи

1. Начал. знач-е $I_0 < I^* \Rightarrow$ зад. (6)-(7) приоб-
 ретает вид:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = 0, t \geq 0, \\ \frac{dZ}{dt} = \beta I(t), \\ \frac{dI}{dt} = -\beta I(t), \\ S(t=0) = S_0, Z(t=0) = Z_0, I(t=0) = I_0 \end{cases}$$

Реш-е этой с-мы: $S(t) = S_0$;
 $I(t) = I_0 e^{-\beta t}$; $Z(t) = Z_0 + I_0 (1 - e^{-\beta t})$, (8)
 где $S_0 + Z_0 + I_0 = N$. Откуда $\Rightarrow Z(t) + I(t) =$
 $Z_0 + I_0$

2. Начал. знач-е $I_0 > I^*$. Тогда по край-
 ней мере при $t \in [0, \tau]$ имеем $I(t) > I^*$ в
 силу непр-ти $I(t) \Rightarrow$ с-ма (6)-(7) имеет
 вид:

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha S(t), t \in [0, \tau],$$

$$\begin{cases} \frac{dZ}{dt} = \beta I(t), \\ \frac{dI}{dt} = \alpha S(t) - \beta I(t), \\ S(t=0) = S_0, Z(t=0) = Z_0, I(t=0) = I_0 \end{cases}$$

Имеем $S(t) = S_0 e^{-\alpha t}$ (9)

Подставив в 3-ю ур-ние, получим:

$$\left\{ \frac{dI}{dt} = -\beta I(t) + \alpha S_0 e^{-\alpha t}, I(t=0) = I_0 \right\}. \text{ Откуда}$$

находим $I(t) = I_0 e^{-\beta t} + \frac{\alpha S_0}{\beta - \alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})$ (10)

Учитывая закон сохранения, находим:

$$Z(t) = Z_0 + I_0 + S_0 - I(t) - S(t) \quad (11)$$

Заметим, что в выраж-е (10) входит $(\beta - \alpha)$ — разность си/коэфф-том выздоровления β и коэфф-том заболевания α .

Обычно эти коэфф-ты близки, и можно считать, что $(\beta - \alpha)\tau \ll 1$, где τ — интервал, при $\alpha I(t) > I^*$. В этом случае выраж-е (10) можно преобраз-ть к виду:

$$I(t) = e^{-\beta t} \left(I_0 + \frac{\alpha S_0}{\beta - \alpha} (e^{(\beta - \alpha)t} - 1) \right) \quad (12)$$

If $t \in (0, \tau)$, то $(\beta - \alpha)\tau \ll 1$ и $e^{(\beta - \alpha)t} \approx 1 + (\beta - \alpha)t$

Тогда из (12) получаем: $I(t) \approx (I_0 + \alpha S_0 t) e^{-\alpha t}$,
 $\beta \approx \alpha$ (13)

Из ф-лы (13) легко опред-ть $t = t_{\max}$ — время достижения макс значения числа больных, т.е. пик эпидемии.

Из усл-я $I'(t) = (\alpha S_0 - \alpha(I_0 + \alpha S_0 t)) e^{-\alpha t} = 0$, учитывая, что $\beta \approx \alpha$, находим $t_{\max} = \frac{\alpha S_0 - \alpha I_0}{\alpha^2 S_0} = \frac{S_0 - I_0}{\alpha S_0}$ (14)

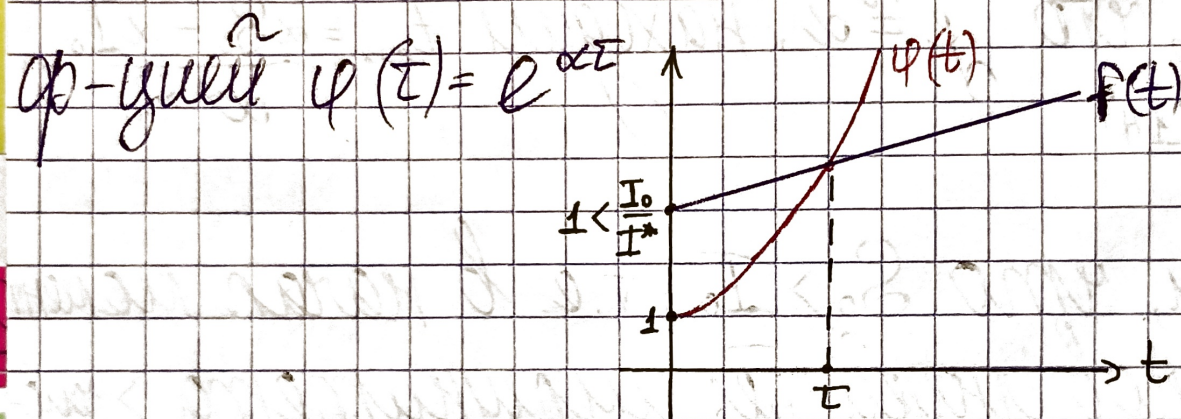
Заметим, что $S_0 > I_0$, т.е. в начал. момент число здоров. людей без иммунитета > чис-ла больных людей. Подставив $t_{\max}$ из (14) в вырат-е (13) г/ $I(t)$, найдем $I(t_{\max}) = (I_0 + \alpha S_0 \frac{S_0 - I_0}{\alpha S_0}) e^{-\alpha t_{\max}} = S_0 e^{-(1 - \frac{I_0}{S_0})}$ (15)

П.н. $S_0 > I_0$, то $q = 1 - \frac{I_0}{S_0} > 0$, и получаем, что $I_{\max} = I(t_{\max}) = S_0 e^q < S_0, S_0 > I_0 > I^*$ (16)

Мы использовали модель при усл. $I(t) > I^*$. Естественно, что после достижения макс, $I(t)$ начинает убывать и при некот. $t = \tau$ становится равной порог. знач-ю

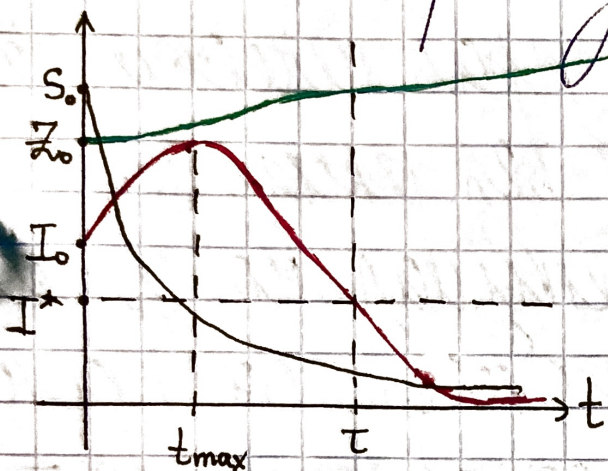
$$I(t) = I^*$$

Согласно (13), велич. τ опред-ся из Трансцендентного ур-ния $\frac{I_0 + \alpha S_0 \tau}{I^*} = e^{\alpha \tau}$ (17). Велич. τ опред-ся как т. пересеч-я лин. ф-ции $f(t) = \frac{I_0}{I^*} + \frac{\alpha S_0}{I^*} t$, $\frac{I_0}{I^*} > 1$, с экспоненц.



Заметим, что τ зависит от нач-й пар-ров $\frac{I_0}{I^*}$ и $\frac{S_0}{I^*}$. Чем меньше коэфф-т заболеваемости α , тем больше время τ , при $I(t) > I^*$. И.о., при усл. $(\beta - \alpha)\tau \ll 1$ было определено распределение во времени; согласно численности здоров. особей без иммунитета (9): $S(t) = S_0 e^{-\alpha t}$; (18) а, согласно (13), численность больных особей $I(t) = (I_0 + \alpha S_0 t) e^{-\alpha t}$ (19)

Тогда, согласно принципу консервации (11), легко опред-ся численность здоров особей с импун-м: $Z(t) = Z_0 + (I_0 + S_0) \cdot (1 - e^{-\alpha t}) - \alpha S_0 t e^{-\alpha t}$ (20). Полученные распре-ния качественно приведены на рис.:



Ф-лы (18) - (20) дают нам распре-ние $S(t)$, $I(t)$, $Z(t)$ при $t \in [0, \tau]$. При $t \geq \tau$ мы должны исп-ть ^{эти} ф-лы, считая начал. значением зна-я, получ. в м. $t = \tau$. Т.о., при $t \geq \tau$ имеем:

$$\begin{cases} S(t) = S_0 e^{-\alpha \tau} = \text{const}, \\ I(t) = (I_0 + \alpha S_0 \tau) e^{-\alpha t}, \\ Z(t) = Z_0 + I_0 + S_0 - S_0 e^{-\alpha \tau} - (I_0 + \alpha S_0 \tau) e^{-\alpha t} \end{cases} \quad (21)$$

В целом, как показано на рис. 2, все ф-ции смен-ся непр., но при $t = \tau$ имеются разрывы производ-х. Наиболее характерно

изм-ся числен-ть больных. В начале практи-чески мин. рост, затем $I(t)$ достигает сво-го макс при $t = t_{\max}$, после этого идет убывание как $t e^{-\alpha t}$ до $t = \tau$. Инфекция заканч-ся. При $t > \tau$ $I(t)$ экспоненц. уб-вает до 0. Больных практически нет.

Число здоров. особей без иммунитета $S(t)$ в начале экспоненциально убывает до $S_0 e^{-\alpha t}$, а затем становится постоян-ным $S(t) = S_0 e^{-\alpha \tau} = \text{const}$ при $t > \tau$.

Число здоровых в начале растет, а затем при $t > \tau$ стремится к const: $Z(t) \rightarrow Z_0 + I_0 + S_0 - S_0 e^{-\alpha \tau}$

Весь анализ проведен д/случая $(\beta - \alpha)\tau < 1$ но он легко проводится и д/ $(\beta - \alpha)\tau \geq 1$. В этом случае, чтобы найти $t_{\max}$, при к-м $I(t)$ достигает своего макс, надо продифференцир-ть (10) и приравнять 0. Тогда получим: $I'(t) = \beta \left(\frac{\alpha S_0}{\beta - \alpha} - I_0 \right) e^{-\beta t} - \frac{\alpha \beta S_0}{\beta - \alpha} e^{-\alpha t} = 0$. Откуда:

$$t_{\max} = \frac{1}{\beta - \alpha} \ln \frac{\beta (\alpha S_0 - (\beta - \alpha) I_0)}{\alpha^2 S_0} \quad (22)$$

Запишем, что при $(\beta - \alpha)t_{\max} \ll 1$ выражение (22) переходит в ф-лу (14). Покажем это. При $\beta = \alpha + \varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$:

$$t_{\max} = \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{(\alpha + \varepsilon)(\alpha S_0 - \varepsilon I_0)}{\alpha^2 S_0} \approx$$

$$\approx \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{\alpha^2 S_0 + \alpha \varepsilon (S_0 - I_0)}{\alpha^2 S_0} \quad \text{или}$$

$$t_{\max} = \frac{1}{\varepsilon} \ln \left(1 + \varepsilon \frac{S_0 - I_0}{\alpha S_0} \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{S_0 - I_0}{\alpha S_0}, \text{ т.е. совпадает с ф-лой (14)}$$

Зная $t_{\max}$, можно вычислить $I_{\max} = I(t_{\max})$. Согласно (10), имеем $I_{\max} =$

$$= I_0 e^{-\beta t_{\max}} + \frac{\alpha S_0}{\beta - \alpha} (e^{-\alpha t_{\max}} - e^{-\beta t_{\max}}) = e^{-\beta t_{\max}} \left(I_0 - \frac{\alpha S_0}{\beta - \alpha} + \frac{\alpha S_0}{\beta - \alpha} e^{(\beta - \alpha)t_{\max}} \right) \quad (23)$$

Согласно (22), имеем: $e^{(\beta - \alpha)t_{\max}} =$

$$= \frac{\beta (\alpha S_0 - (\beta - \alpha) I_0)}{\alpha^2 S_0}$$

Подставив в (23), найдем $I_{\max} = e^{-\beta t_{\max}} \cdot \left(S_0 \left(\frac{\beta - \alpha}{\alpha} \right) I_0 \right) \quad (24)$

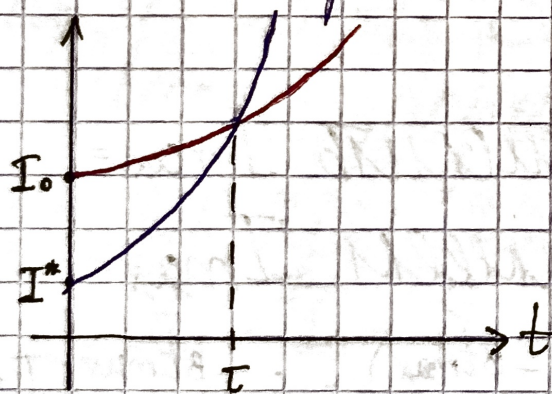
Определим теперь время окончания эпидемии

определим τ из усл-я $I(\tau) = I^*$, т.е. время, когда
 после макс заболевания идет убывание $I(t)$
 до величины равновесия состояния. Ис-
 пользуя (10), получим ур-ние д/спр-ния τ :

$$I^* = I_0 e^{-\beta \tau} + \frac{\alpha S_0}{\beta - \alpha} (e^{-\alpha \tau} - e^{-\beta \tau})$$
 или

$$\varphi(\tau) = I_0 - \frac{\alpha S_0}{\beta - \alpha} + \frac{\alpha S_0}{\beta - \alpha} e^{(\beta - \alpha)\tau} = I^* e^{\beta \tau} \quad (25) -$$

— это трансцендентное ур-ние; его корень —
 — это пересечение двух экспонент.



Дополнительная литература

1. "ДУ в приложениях" В. В. Амелькин.

Глава "Теория распространения эпидемий"